

# Geometrische Theorie Semilinearer Partieller Differentialgleichungen

Lev Lazar  
Studiengang M.Sc.Mathematik  
Matrikel 5986811

Wintersemester 2010/2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Halbgruppen von Operatoren</b>	<b>3</b>
1.1	Stark stetige Halbgruppen . . . . .	3
1.2	Analytische Halbgruppen . . . . .	8
1.3	Anhang . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Potenzen sektorieller Operatoren</b>	<b>15</b>
2.1	Potenzen sektorieller Operatoren . . . . .	15
2.2	Die Interpolationsräume . . . . .	22
2.3	Anhang . . . . .	23
2.4	Übungen . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Die Formel der Variation der Konstanten</b>	<b>31</b>
3.1	Das lineare Cauchy Problem . . . . .	31

# 1 Halbgruppen von Operatoren

## 1.1 Stark stetige Halbgruppen

**Definition 1.1.** Eine Familie Stetiger Operatoren  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  auf einem Banach-Raum  $X$  bezeichnen wir eine stark stetige Halbgruppe, falls gilt:

- (i)  $U(0) = \mathbb{I}$
- (ii)  $U(s)U(t) = U(s+t)$  für alle  $t, s \geq 0$ ,
- (iii)  $U(t)x \rightarrow x$  für  $t \rightarrow 0+$  für alle  $x \in X$ .

Der infinitesimale Erzeuger  $A$  einer analytischen Halbgruppe ist definiert als:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (U(t) - \mathbb{I})x.$$

Dabei ist der Definitionsraum  $D(A)$ : alle  $x \in X$ , so dass der Grenzwert existiert. Wir schreiben dann:

$$e^{-At} := U(t).$$

**Lemma 1.2.** Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum  $X$  mit dem Definitionsbereich  $D(A)$  dicht in  $X$ . Es gelte:

- (i)  $\{\xi \in \mathbb{R} : \xi < 0\} \subset \rho(A)$ ,
- (ii)  $\|\rho(-\xi)\| = \|(A + \xi\mathbb{I})^{-1}\| \leq \frac{M}{\xi}$  für alle  $\xi > 0$  und ein  $M > 0$ .

Dann sind die Abbildungen:

$$V_n : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad V_n(t) := \left( \mathbb{I} + \frac{t}{n}A \right)^{-n} \quad (1.1.1)$$

gleichmäßig beschränkt, und bilden eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Aus der zweiten Annahme folgt:

$$\|(\mathbb{I} + \xi^{-1}A)^{-1}\| \leq M \quad \Rightarrow \quad \|V_n(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.15 ist die Resolvente holomorph, also folgt aus der ersten Annahme:  $V_n$  differenzierbar für alle  $t > 0$ . Wir zeigen:  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.

Für  $t > 0$  und  $x \in D(A^2)$  gilt:

$$\begin{aligned}
& V_n(t)x - V_m(t)x \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds} [V_n(s)V_m(t-s)x] ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} [V_n'(s)V_m(t-s) - V_n(s)V_m'(t-s)] x ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left[ -A \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} V_m(t-s) + V_n(s) A \left( \mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} \right] x ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left[ - \left( \mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right) A + \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right) A \right] \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left( \mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} x ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left( \frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) A^2 \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left( \mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} x ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left( \frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left( \mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} A^2 x ds.
\end{aligned}$$

Daher folgt für  $t \in (0, T)$  mit  $0 < T < \infty$  und  $x \in D(A^2)$ ,  $m \geq n$ :

$$\begin{aligned}
& \|V_n(t)x - V_m(t)x\| \\
&\leq M^2 \|A^2 x\| \int_0^t \left( \frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) ds \\
&= M^2 \|A^2 x\| \frac{t^2}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Weiter ist  $V_n(t) \rightarrow \mathbb{I}$  für  $t \rightarrow 0+$ . Also, insgesamt folgt:  $\{V_n(t)x\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge für jedes  $x \in D(A^2)$ , und konvergiert gleichmäßig in  $t$ , auf jedem endlichen Intervall in  $[0, \infty)$ .

Wegen  $D(A^2) = (A + \xi)^{-1}D(A)$ , und  $R((A + \xi)^{-1}) = D(A)$  sowie  $D(A)$  dicht in  $X$ , folgt  $D(A^2)$  dicht in  $X$ . Also konvergiert  $\{V_n(t)x\}_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x \in D(A)$  gleichmäßig in  $t$ .  $\square$

**Satz 1.3.** *Der Operator  $A$  habe die Eigenschaften aus Lemma 1.2. Dann erzeugt  $-A$  eine stark stetige Halbgruppe.*

*Beweis.* Für die Folge  $\{V_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  aus Lemma 1.2 gilt:  $\{V_n(t)x\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall in  $t$  und für jedes  $x \in D(A)$ . Wir definieren:

$$U(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t)x, \quad \text{für alle } t \geq 0, \text{ und alle } x \in D(A). \quad (1.1.2)$$

Da  $V_n$  stetig in  $t$ , folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem endlichem Intervall, dass auch  $U(t)$  stetig in  $t$ . Weiterhin gilt:

$$U(0) = \mathbb{I}, \quad \|U(t)\| \leq M, \quad U(t)x \rightarrow x \text{ für } t \rightarrow 0+. \quad (1.1.3)$$

Wie im Beweis des Lemmas 1.2 bereits ausgerechnet haben wir:

$$\frac{d}{dt} V_n(t)x = -A \left( \mathbb{I} + \frac{t}{n} A \right)^{-n-1} x = - \left( \mathbb{I} + \frac{t}{n} A \mathbb{I} \right)^{-1} V_n(t)Ax,$$

wobei wir verwendet haben dass die Resolvente (bzw.  $V_n(t)$ ) mit  $A$  kommutiert. Also folgt:

$$U(t)Ax = AU(t)x. \quad (1.1.4)$$

Weiter gilt:

$$V_n(t)x - x = - \int_0^t A \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-1} V_n(s)x ds = - \int_0^t \left( \mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-1} V_n(s)Ax ds.$$

Durch Grenzübergang erhalten wir:

$$U(t)x - x = - \int_0^t U(s)Ax ds = - \int_0^t AU(s)x ds, \quad (1.1.5)$$

für alle  $t \in [0, T]$  mit  $0 < T < \infty$ ,  $x \in D(A)$ . Unter Verwendung der Stetigkeit

von  $U(t)$  in  $t$  rechnet man:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{-1} \left\| - \int_0^{t+h} U(s)Ax \, ds + \int_0^t U(s)Ax \, ds + U(t)Axh \right\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{-1} \left\| \int_t^{t+h} (U(t) - U(s))Ax \, ds \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{-1} \varepsilon(h) |h| \|Ax\| = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) \|Ax\| = 0. \end{aligned}$$

Also folgt für alle  $x \in D(A)$ :

$$\frac{d}{dt} U(t) = -U(t)Ax = -AU(t)x, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.1.6)$$

Für alle  $0 \leq s \leq t < T$  gilt:

$$\frac{d}{ds} U(t-s)U(s)x = AU(t-s)U(s)x - AU(t-s)U(s)x = 0.$$

Also folgt für alle  $0 \leq \tau, s \leq t < T$  und alle  $x \in D(A)$ :

$$U(t-s)U(s)x = U(t-\tau)U(\tau)x = U(t)x \Leftrightarrow U(t-\tau)U(\tau) = U(t).$$

Also mit  $s := t - \tau$  folgt:

$$U(\tau + s) = U(\tau)U(s). \quad (1.1.7)$$

Nach annahme ist aber  $D(A)$  dicht in  $X$ , und somit ist  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe.

Es ist noch:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1} (U(t) - \mathbb{I})x &= \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1} (U(t) - U(0))x \\ &= \frac{d}{dt} U(t)|_{t=0} x = -AU(0)x = -Ax, \end{aligned}$$

d.h.  $-A$  ist der Erzeuger der Halbgruppe gemäß der Definition 1.1.  $\square$

**Lemma 1.4.** *Der Operator  $U(t) : D(A) \rightarrow X$  sei definiert wie in (1.1.2). Dann ist:*

$$\rho(-\xi) = (A + \xi)^{-1} = \int_0^t e^{-\xi t} U(t) \, dt, \quad \forall \xi \in \rho(A), \Re(\xi) > 0. \quad (1.1.8)$$

*Insbesondere ist für  $A \neq B$ :  $e^{-At} \neq e^{-Bt}$ .*

*Beweis.* Es ist:  $\frac{d}{dt} e^{-\xi t} U(t)y = -e^{-\xi t} U(t) (A + \xi) y$  also:

$$-\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-\xi t} U(t)y dt = y = \int_0^{\infty} e^{-\xi t} U(t) (A + \xi) y dt.$$

Daher, mit  $x := (A + \xi) y$  folgt die Behauptung für alle  $x \in D(A) = R((A + \xi)^{-1})$ .  $\square$

**Satz 1.5.** Sei  $A : X \rightarrow X$  ein Abgeschlossener, dicht definierter linearer Operator auf dem Banachraum  $X$ . Es gäbe eine Zahl  $\beta \in \mathbb{R}$  mit:

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \xi < \beta\} \subset \rho(A),$$

und sei:

$$\|(A + \xi)^{-k}\| \leq M (\xi - \beta)^{-k}, \quad \forall \xi > \beta, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.9)$$

Dann generiert  $-A$  eine stark stetige Halbgruppe.

*Beweis.* Setzen wir  $A_\beta := -(A + \beta)$ , dann erfüllt  $A_\beta$  offensichtlich die Voraussetzungen in Lemma 1.2. Damit ist  $U_\beta(t) := e^{-A_\beta t}$  definiert, und mit den selben Argumenten wie in dem Beweis von Satz 1.3 definiert eine stark stetige Halbgruppe.

Setzen wir:

$$e^{-At} := U(t) := e^{\beta t} U_\beta(t) = e^{\beta t} e^{-(A+\beta)t}, \quad (1.1.10)$$

dann erfüllt  $U(t)$  die Eigenschaften in Definition 1.1 und erzeugt eine stark stetige Halbgruppe, die allerdings nicht mehr beschränkt ist. Es gilt nämlich:

$$\|U(t)\| \leq M e^{\beta t}.$$

$\square$

## 1.2 Analytische Halbgruppen

**Definition 1.6.** Eine Familie stetiger Operatoren  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  auf einem Banachraum  $X$  bezeichnen wir eine analytische Halbgruppe, falls gilt:

- (i)  $U(0) = \mathbb{I}$ ,  $U(s)U(t) = U(s+t)$  für alle  $t, s \geq 0$ ,
- (ii)  $U(t)x \rightarrow x$  für  $t \rightarrow 0+$  für alle  $x \in X$ ,
- (iii)  $t \mapsto U(t)x$  ist reell analytisch für jedes  $x \in X$  und alle  $t \in (0, \infty)$ .

Der infinitesimale Erzeuger  $A$  einer analytischen Halbgruppe ist definiert als:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (U(t) - \mathbb{I})x.$$

Dabei ist der Definitionsraum  $D(A)$ : alle  $x \in X$ , so dass der Grenzwert existiert. Wir schreiben dann:

$$e^{-At} := U(t).$$

**Definition 1.7.** Sei  $X$  ein Banachraum und  $A$  ein linearer Operator auf  $X$ . Wir sagen  $X$  ist ein sektorieller Operator falls gilt:

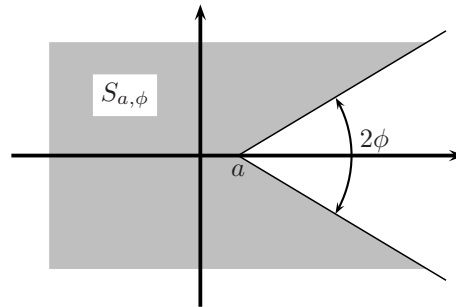
- (i)  $A$  ist abgeschlossen und  $D(A)$  ist dicht,
- (ii) Es gibt ein  $M > 0$ , ein  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$  und ein  $a \in \mathbb{R}$ , so dass der Sektor:

$$S_{a,\phi} := \{\xi \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |\arg(\xi - a)| \leq \pi\}$$

eine Teilmenge der Resolvente von  $A$  ist, d.h.:  $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$ , und es gilt:

$$\|(A - \xi)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\xi - a|},$$

für alle  $\xi \in S_{a,\phi}$ .



**Lemma 1.8.** Sei  $A$  ein sektorieller Operator auf  $X$  mit dem Sektor  $S_{a,\phi}$ . Es gebe Konstanten  $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  und  $R_0, C > 0$  mit:

$$\|A(A - \xi)^{-1}\| \leq C$$

für alle  $\xi \neq \sigma(A)$  mit  $|\arg(\xi)| \geq \phi_0$  und  $|\xi| \geq R_0$ . Sei  $B$  ein linearer Operator auf  $X$  mit  $D(A) \subset D(B)$  und gelte:

$$\|Bx\| \leq \varepsilon \|Ax\| + K_\varepsilon \|x\|$$

für alle  $x \in D(A)$  und mit  $\varepsilon, K_\varepsilon > 0$ , so dass  $\varepsilon C < 1$ .  
Dann ist  $A + B$  sektoriell.

*Beweis.* Es ist:

$$\|B(A - \xi)^{-1}\| \leq \varepsilon \|A(A - \xi)^{-1}\| + K_\varepsilon \|(A - \xi)^{-1}\| \leq \varepsilon C + K_\varepsilon \frac{M}{|\xi - a|}$$

Wegen:

$$\|(\mathbb{I} - F)^{-1}\|^{-1} \geq \|\mathbb{I} - F\| \geq 1 - \|F\| \Leftrightarrow (1 - \|F\|)^{-1} \geq \|(\mathbb{I} - F)^{-1}\|$$

für alle beschränkte lineare Operatoren auf  $X$  mit  $\|F\| < 1$ , folgt:

$$\begin{aligned} \|((A + B) - \xi)^{-1}\| &\leq \|(\mathbb{I} - B(A - \xi)^{-1})^{-1}\| \| (A - \xi)^{-1} \| \\ &\leq \frac{M}{|\xi - a|} \left( 1 - \varepsilon C - K_\varepsilon \frac{M}{|\xi - a|} \right)^{-1} \leq \frac{C}{|\xi - a|}, \end{aligned}$$

wobei wir  $|\xi|$  groß genug wählen. Schließlich ist:  $\sigma(A + B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$ , und damit gilt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.9.** Ist  $A$  ein sektorieller Operator, so ist  $-A$  erzeuger der analytischen Semigruppe  $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ , mit:

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi + A)^{-1} e^{\xi t} d\xi. \quad (1.2.1)$$

Dabei ist  $\Gamma$  eine Kurve in der Resolvente  $\rho(-A)$  mit  $\arg \xi \rightarrow \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Weiter kann  $e^{-At}$  analytisch erweitert werden auf einen Sektor:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \varepsilon\} \supset \mathbb{R}, \quad (1.2.2)$$

und falls  $\Re(\sigma(A)) > a$ , so gilt:

$$\|e^{-At}\| \leq Ce^{-at}, \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t}e^{-at}$$

für eine Konstante  $C$ .

Schließlich gilt:

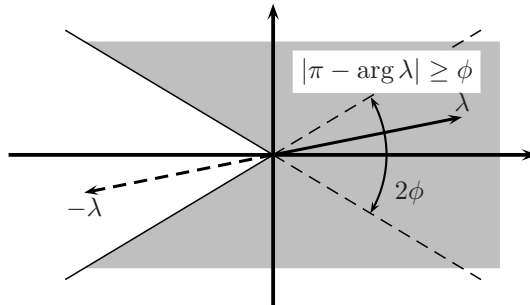
$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At},$$

für alle  $t > 0$ .

*Beweis.* Mit Lemma 1.8 können wir die Betrachtung auf  $a = 0$  einschränken, denn mit  $A$  ist auch  $A - a\mathbb{I}$  sektoriell.

Wählen wir  $\xi \in \mathbb{C}$  mit  $|\pi - \arg \xi| \geq \phi$ , dann gilt:

$$\|(A + \xi)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\xi|}.$$



Es ist dann:

$$\begin{aligned} \|e^{-At}\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi + A)^{-1} e^{\xi t} d\xi \right\| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} (\xi - a)^{-1} e^{\xi t} d\xi \right\| = \frac{Me^{at}}{2\pi} < \infty, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Verschieben wir die Kurve  $\Gamma$  nach Rechts um einen kleinen Abstand und bezeichnen wir diese mit  $\Gamma'$ . Das Integral bleibt davon unverändert, und wir

erhalten für  $t, s > 0$ :

$$\begin{aligned} e^{-At} e^{-As} &= (2\pi i)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\xi t} e^{\mu s} (A + \xi)^{-1} (A + \mu)^{-1} d\xi d\mu \\ &= (2\pi i)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} ((A + \xi)^{-1} - (A + \mu)^{-1}) d\xi d\mu, \end{aligned}$$

wobei wir die Resolventen Gleichung (1.3.1) verwendet haben. Aber es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} (A + \mu)^{-1} d\xi &= 0 & \forall \mu \in \Gamma', \\ \int_{\Gamma'} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} (A + \xi)^{-1} d\mu &= 2\pi i e^{\xi(t+s)} (A + \xi)^{-1} & \forall \xi \in \Gamma. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir:

$$e^{-At} e^{-As} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\xi(t+s)} (A + \xi)^{-1} d\xi = e^{-A(t+s)}.$$

Der Ausdruck (1.2.1) ist definiert sogar für  $t \in \mathbb{C}$  mit  $\arg t < \varepsilon$ , denn wir können stets  $\Gamma$  so wählen dass  $\arg t\xi > \frac{\pi}{2}$ , d.h.  $\Re t\xi < 0$  für alle  $\xi \in \Gamma$ . Weiterhin können wir (1.2.1) unter dem Integral differenzieren und damit ist (1.2.1) analytisch auf (1.2.2). Wie in Lemma 1.14 haben wir auch  $Ae^{-At} = e^{-At}A$  und:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-At} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi e^{\xi t} (A + \xi)^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\xi t} (\mathbb{I} - A(A + \xi)^{-1}) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\xi t} d\xi - Ae^{-At} = -Ae^{-At}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun  $\mu := t\xi$ , so erhalten wir:

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\mu} \left( A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \frac{d\mu}{t}.$$

Andererseits haben wir:

$$\left\| \left( A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| \leq M \frac{|t|}{|\mu|}, \quad \text{für } t \text{ mit } |\arg t| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon.$$

Daher folgt:

$$\|e^{-At}\| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|} d\mu = \frac{M}{2\pi}.$$

Also ist  $e^{-At}$  gleichmäßig beschränkt. Weiter haben mit:

$$\left\| A \left( A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| = \left\| \mathbb{I} - \frac{\mu}{t} \left( A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| \leq 1 + M,$$

erhalten wir auch die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} e^{-At} \right\| &= \|Ae^{-At}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\mu} A \left( A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} t^{-1} d\mu \right\| \\ &\leq \frac{1+M}{2\pi t} \int_{\Gamma} e^{\Re(\mu)} d\mu = \frac{1+M}{\pi t}. \end{aligned}$$

Wir bemerken:

$$\xi(A + \xi)^{-1} = \mathbb{I} - A(A + \xi)^{-1} \Leftrightarrow (A + \xi)^{-1} - \xi^{-1} = -\xi^{-1}A(A + \xi)^{-1}.$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} \|e^{-At}x - x\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\xi t} ((A + \xi)^{-1} - \xi^{-1}) x d\xi \right\| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\xi t} A\xi^{-1}(A + \xi)^{-1}x d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|Ax\| t \left| \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu}}{\mu^2} d\mu \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|Ax\| t \rightarrow 0, \text{ für } t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Und daher folgt:

$$e^{-At} \rightarrow \mathbb{I} \quad \text{für } t \rightarrow 0+,$$

auf  $D(A)$ . Aber  $D(A)$  ist dicht in  $X$  und somit ist  $U(t) \rightarrow \mathbb{I}$  für  $t \rightarrow 0+$ .  $\square$

### 1.3 Anhang

**Definition 1.10.** Sei  $X$  ein linearer Raum, dann schreiben wir  $\mathcal{B}(X)$  für die Menge stetiger linearer Operatoren auf  $X$ .

**Definition 1.11.** Sei  $X$  ein linearer Raum, und sei  $A : X \rightarrow X$  ein linearer Operator. Dann definieren wir die Mengen:

$$\begin{aligned} \text{(Definitionsbereich)} \quad D(A) &:= \{x \in X : Ax \in X\}, \\ \text{(Bild)} \quad R(A) &:= \{y \in X : \exists x \in X : Ax = y\}, \\ \text{(Nullraum)} \quad N(A) &:= \{x \in X : Ax = 0\}, \\ \text{(Resolventenmenge)} \quad \rho(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbb{I} \text{ ist invertierbar}\}, \\ \text{(Spektrum)} \quad \sigma(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbb{I} \text{ ist singulär}\}. \end{aligned}$$

**Definition 1.12.** Sei  $X$  ein linearer Raum, und sei  $A : X \rightarrow X$  ein linearer Operator. Dann definieren wir die Resolvente  $\rho(\lambda)$  von  $A$  durch:

$$\rho : \rho(A) \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad \rho(\lambda) := (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}.$$

**Lemma 1.13.** Für  $\xi_1, \xi_2 \in \rho(A)$  erfüllt die Resolvente die erste Resolventen-Gleichung:

$$\rho(\xi_2) - \rho(\xi_1) = (\xi_2 - \xi_1) \rho(\xi_1) \rho(\xi_2). \quad (1.3.1)$$

Inbesondere kommutieren die Operatoren  $\rho(\xi_1), \rho(\xi_2)$  für alle  $\xi_1, \xi_2 \in \rho(A)$ .

*Beweis.* Es gilt:

$$\rho(\xi_2) - \rho(\xi_1) = \rho(\xi_1) (T - \xi_1) \rho(\xi_2) - \rho(\xi_1) (T - \xi_2) \rho(\xi_2) = (\xi_2 - \xi_1) \rho(\xi_1) \rho(\xi_2).$$

□

**Lemma 1.14.** Die Resolvente kommutiert mit  $A$ .

*Beweis.* Es ist:

$$A\rho(\xi) = \underbrace{(A - \xi\mathbb{I} + \xi\mathbb{I})}_{D(\dots)=D(A)}\rho(\xi) = \mathbb{I} + \xi\rho(\xi) \Rightarrow D(A\rho(\xi)) = X.$$

Daher gilt  $\rho(\xi)A \subset A\rho(\xi)$ . Aus einer analogen Rechnung folgt:  $\rho(\xi)A = A\rho(\xi)$ . □

**Satz 1.15.** *Die Resolvente ist holomorph auf  $\rho(A)$ .*

*Beweis.* Aus der Darstellung (1.3.1) folgt:

$$\rho(\xi_0) - \rho(\xi) = (\xi_0 - \xi) \rho(\xi) \rho(\xi_0) \Leftrightarrow \rho(\xi_0) = [\mathbb{I} - (\xi - \xi_0) \rho(\xi_0)] \rho(\xi).$$

Also, für  $|\xi - \xi_0| \|\rho(\xi_0)\| < 1$  gilt:

$$\rho(\xi) = [\mathbb{I} - (\xi - \xi_0) \rho(\xi_0)]^{-1} \rho(\xi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \xi_0)^n (\rho(\xi_0))^{n+1}.$$

Für  $\xi_0 \in \rho(A)$  hat also die Resolvente eine Potenzreihen darstellung in einer Umgebung von  $\xi_0$ . Damit ist  $\rho(A)$  offen und die Resolvente stückweise holomorph.  $\square$

## 2 Potenzen sektorieller Operatoren

### 2.1 Potenzen sektorieller Operatoren

**Definition 2.1.** Sei  $A$  ein sektorieller Operator mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$ . Dann definieren wir für alle  $\alpha > 0$ :

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \quad (2.1.1)$$

*Bemerkung 2.2.*

(i) Sei  $X = \mathbb{R}$  dann ist  $A \equiv a \in \mathbb{R}$  und für alle  $\alpha \in \mathbb{N}$  haben wir:

$$\begin{aligned} a^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-at} dt = \underbrace{-\frac{e^{-at} t^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}}_{=0} + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} a^{-1} \int_0^{\infty} t^{\alpha-2} e^{-at} dt \\ &= \frac{(\alpha-1)!}{\Gamma(\alpha)} a^{-(\alpha-1)} \int_0^{\infty} e^{-at} dt. \end{aligned}$$

(ii) Sei  $A = \mathbb{I} + B$  mit  $\|B\| < 1$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= (\mathbb{I} + B)^{-\alpha} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n \right)^{\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} B^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} B^n, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

wobei:

$$\binom{-\alpha}{n} := (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!} = (-1)^n \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (\alpha+1)}{n!}. \quad (2.1.3)$$

(iii) Ist  $A$  beschränkt und in (2.1.4)  $\alpha = 1$ , so ist  $A^{-1}$  die inverse von  $A$ :

$$\begin{aligned} AA^{-1}x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(A + \xi)^{-1} \int_0^{\infty} e^{\xi t} x dt d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi^{-1} A(A + \xi)^{-1} x d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi^{-1} x d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A + \xi)^{-1} x d\xi = x, \end{aligned}$$

wobei wir  $PX = \ker A$  benutzen für die Projektion  $P$  definiert durch:

$$Px := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \rho(\xi) x d\xi.$$

**Lemma 2.3.** *Sei  $A$  sektoriell mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$  und  $\alpha > 0$ , dann ist  $A^{-\alpha}$  beschränkt und injektiv. Weiter gilt für alle  $\alpha, \beta > 0$ :*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)},$$

und für  $0 < \alpha < 1$ :

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^{-\alpha} (\xi + A)^{-1} d\xi.$$

*Beweis.* Es ist  $\Re(\Sigma_A) > \delta \geq 0$ , also gilt nach Satz 1.9:

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-\delta t} \quad \wedge \quad \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C e^{-\delta t}}{t}.$$

Daher haben wir:

$$\|A^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\delta t} dt = C \delta^{-\alpha} < \infty,$$

und  $A^{-\alpha}$  ist beschränkt für alle  $\alpha > 0$ .

Für  $\alpha, \beta > 0$  rechnen wir:

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(s+t)} ds dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_t^\infty (u-t)^{\beta-1} e^{-Au} du dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha-1+\beta-1} e^{-Au} \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^{\alpha-1} \left(1-\frac{t}{u}\right)^{\beta-1} dt du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha-1+\beta-1} e^{-Au} \int_0^u z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} u^1 dz du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-Au} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} du = A^{-(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Sei  $x \in X$  mit  $A^{-\alpha}x = 0$ , dann folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \alpha$ :

$$A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0.$$

Aber wegen  $A^{-n} = (A^{-1})^n$ , und da  $A^{-1}$  injektiv, folgt:  $x = 0$ . Also ist  $A^{-\alpha}$  injektiv.

Es ist:  $(A + \xi)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\xi t} e^{-At} dt$ , also haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \xi^{-\alpha} (A + \xi)^{-1} d\xi &= \int_0^\infty \int_0^\infty \xi^{-\alpha} e^{-\xi t} d\xi e^{-At} dt = \int_0^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) dt \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} A^{-\alpha},
\end{aligned}$$

für alle  $0 < \alpha < 1$ , da  $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi/\sin \pi \alpha$ . □

**Definition 2.4.** Sei  $A$  ein sektorieller Operator mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$ . Dann definieren wir für alle  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned}
A^\alpha &:= (A^{-\alpha})^{-1}, \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ wobei: } D(A^\alpha) := R(A^{-\alpha}), \\
A^0 &:= \mathbb{I}.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

**Lemma 2.5.** *Es gilt:*

- (i) Für  $\alpha > 0$  der Operator  $A^\alpha$  ist abgeschlossen und  $D(A^\alpha)$  ist dicht.
- (ii) Für  $\alpha \geq \beta$  gilt:  $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ .
- (iii) Es gilt:  $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$  in  $D(A^\gamma)$  mit  $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ .
- (iv) Es gilt:  $A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha$  in  $D(A^\alpha)$  für  $t > 0$ .

*Beweis.*

- (i) Sei  $y \in R(A^{-\alpha})$  und  $x \in X$  mit  $A^{-\alpha}x = y$ . Dann gilt:  $A^\alpha y = x$ , und daher:  $R(A^{-\alpha}) = A^{-\alpha}X \subset D(A^\alpha)$ . Aber da  $A^{-\alpha}$  injektiv, folgt  $D(A^\alpha)$  dicht.

Wir zeigen noch:  $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$ . Dazu sei  $x \in D(A^\alpha)$ , und  $y = A^\alpha x$ . Dann folgt:  $A^{-\alpha}y = x$ , also  $x \in R(A^{-\alpha})$ . Zusammen mit dem Resultat vorher, erhalten wir  $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$ .

- (ii) Seien  $\alpha \geq \beta \geq 0$ , und wählen wir ein  $y \in R(A^{-\alpha})$ . Dazu gibt es ein  $x \in X$  mit  $A^{-\alpha}x = y$  und es gilt:

$$y = A^{-\alpha}x = A^{-\beta-(\alpha-\beta)}x = A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}x.$$

Und da  $A^{-(\alpha-\beta)}$  beschränkt, folgt:

$$A^\beta y = A^{-(\alpha-\beta)}x \in X \Rightarrow y \in D(A^\beta).$$

Mit (i), erhalten wir:  $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ .

- (iii) Mit (ii) folgt für  $x \in D(A^\gamma)$ ,  $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ :

$$A^\alpha A^\beta x = (A^{-\beta} A^{-\alpha})^{-1} x = A^{\alpha+\beta} x.$$

- (iv) Folgt aus der Definition.

□

**Satz 2.6.** *Sei  $A$  sektoriell und gelte  $\Re(\Sigma_A) \geq \delta > 0$ . Dann gibt es für  $\alpha \geq 0$  ein  $C_\alpha > 0$ , so dass für  $t > 0$  gilt:*

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \quad (2.1.5)$$

*Ist  $0 < \alpha \leq 1$  so folgt:*

$$\|(e^{-At} - \mathbb{I})x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\|. \quad (2.1.6)$$

*Beweis.* In Satz 1.9 haben wir gezeigt:  $\|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t}e^{-\delta t}$  für  $t > 0$ . Damit gilt für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ :

$$\|A^m e^{-At}\| = \|(Ae^{-At/m})^m\| \leq \left(\frac{Cm}{t}\right)^m e^{-\delta t}.$$

Für  $0 < \alpha < 1$  und  $t > 0$  folgt wiederum:

$$\begin{aligned} \|A^\alpha e^{-At}\| &= \|Ae^{-At} A^{-(1-\alpha)}\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} Ae^{-A(t+s)} ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|Ae^{-A(t+s)}\| ds \\ &\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{s+t} e^{-\delta s} ds \\ &= \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^t \frac{s^{-\alpha}}{s+t} e^{-\delta s} ds + \int_t^\infty \frac{s^{-\alpha}}{s+t} e^{-\delta s} ds \right] \\ &\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ t^{-1} \int_0^t s^{-\alpha} ds + \int_t^\infty s^{-\alpha-1} ds \right] \\ &\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{-\alpha}}{\alpha} \right] \\ &\leq \frac{C}{\alpha(1-\alpha)} \frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} =: \frac{C_\alpha}{t^\alpha} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Schließlich, wegen:

$$\|A^{\alpha+\beta} e^{-At}\| \leq \|A^\alpha e^{-At/2}\| \|A^\beta e^{-At/2}\| \leq C_\alpha C_\beta t^{-(\alpha+\beta)} e^{-\delta t} 2^{\alpha+\beta},$$

folgt die Behauptung für  $\alpha \geq 0$ .

Schreiben wir nun:

$$(e^{-At} - \mathbb{I})x = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{-As} x ds = - \int_0^t A e^{-As} x ds = - \int_0^t A^{1-\alpha} e^{-As} A^\alpha x ds.$$

Dann folgt für  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} \|(e^{-At} - \mathbb{I})x\| &\leq \|A^\alpha x\| \int_0^t \|A^{1-\alpha} e^{-As}\| ds \leq \|A^\alpha x\| C_{1-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-\delta s} ds \\ &\leq \|A^\alpha x\| C_{1-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} ds \leq \|A^\alpha x\| C_{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.7.** Sei  $x \in D(A)$ , dann gilt für  $0 < \alpha < 1$ :

$$\|A^\alpha x\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha},$$

bzw. dann:

$$\|A^\alpha x\| \leq \varepsilon \|Ax\| + C' \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\|,$$

für alle  $\varepsilon > 0$ , wie es aus der Young'schen<sup>1</sup> Ungleichung folgt. Man beachte lediglich:  $\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$  ist beschränkt für  $0 < \alpha < 1$ .

*Beweis.* Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\beta)A^{-\beta}x\| &= \left\| \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-1} e^{-At} x dt \right\| \\ &\leq C \int_0^\varepsilon t^{\beta-1} \|x\| dt + \left\| -t^{\beta-1} e^{-At} A^{-1} \Big|_{t=\varepsilon}^{t \rightarrow \infty} x \right\| \\ &\quad + \left\| (\beta-1) \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-2} e^{-At} A^{-1} x dt \right\| \\ &\leq C \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \|x\| + 2C \varepsilon^{\beta-1} \|A^{-1}x\| =: y(\varepsilon). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Wegen  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  für  $1/p + 1/q = 1$ , folgt  $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ . Daher folgt die Behauptung für  $\hat{a} := \frac{\varepsilon \alpha}{\alpha}$ ,  $\hat{b} := \frac{b \alpha}{\varepsilon}$  durch einsetzen.

Der minimierer von  $y(\varepsilon)$  ist:

$$\underline{\varepsilon} := 2(1 - \beta) \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} =: k \frac{b}{a},$$

also gilt:

$$\begin{aligned} \|A^{-\beta}x\| &\leq \frac{C}{\beta\Gamma(\beta)} (\underline{\varepsilon})^{\beta-1} (\underline{\varepsilon}\|x\| + 2\beta\|A^{-1}x\|) \\ &= C \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\beta} \left(k \frac{b}{a} a + (2-k)b\right) \\ &= 2C \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)} a^{1-\beta} b^\beta \\ &= 2C \frac{(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)} \|x\|^{1-\beta} \|A^{-1}x\|^\beta. \end{aligned}$$

Aber wegen  $(1-\beta)^{-(1-\beta)} \leq e^{e-1}$  folgt die Behauptung durch einsetzen von  $\alpha := \beta - 1$  und  $Ax$  für  $x$ .  $\square$

**Korollar 2.8.**  $C(\alpha)$  aus Satz ?? ist beschränkt für jedes  $\alpha$  in einem beschränktem Interval in  $(0, \infty)$ , und beschränkt auch für  $\alpha \rightarrow 0+$ .

*Beweis.* Sei  $\|e^{-At}\| \leq C_0 e^{-\delta t}$  und  $\|Ae^{-At}\| \leq C_1 t^{-1} e^{-\delta t}$ . Dann gilt mit Satz 2.7:

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C \|Ae^{-At}\|^\alpha \|e^{-At}\|^{1-\alpha} \leq C C_1^\alpha t^{-\alpha} C_0^{1-\alpha} e^{-\delta t} \rightarrow C C_0 e^{-\delta t},$$

für  $\alpha \rightarrow 0+$ .  $\square$

**Korollar 2.9.** Sei  $A$  sektoriell, mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$ , und sei  $B$  linear, so dass  $BA^{-\alpha}$  beschränkt ist auf  $X$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann ist  $A + B$  sektoriell.

*Beweis.* Es ist:

$$\|Bx\| = \|BA^{-\alpha}A^\alpha x\| \leq \|BA^{-\alpha}\| \left[ \delta \|Ax\| + C' \delta^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \|x\| \right] \leq \varepsilon \|Ax\| + K_\varepsilon \|x\|.$$

Damit folgt aus Lemma 1.8 die Behauptung.  $\square$

## 2.2 Die Interpolationsräume

**Satz 2.10.** *Seien  $A, B$  sektoriell mit  $\Re(\Sigma_A), \Re(\Sigma_B) > 0$ , und sei  $(A - B)A^{-\alpha}$  beschränkt für ein  $\alpha \in [0, 1)$ . Dann sind für jedes  $\beta \in [0, 1]$  die Operatoren  $A^\beta B^{-\beta}$  und  $B^\beta A^{-\beta}$  beschränkt.*

*Beweis.* Wir notieren zunächst für  $\beta \in [0, 1]$ :

$$\|A^\beta(A + \lambda)^{-1}\| \leq \|A(A + \lambda)^{-1}\|^\beta \|(A + \lambda)^{-1}\|^{1-\beta} \leq M|\lambda|^{\beta-1}.$$

Dann auch:

$$\|B^{-\beta} - A^{-\beta}\| = \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} (B + \lambda)^{-1} (A - B) (A + \lambda)^{-1} d\lambda.$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \|A^\beta B^{-\beta} x\| &= \left\| \left[ \mathbb{I} - \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} B^\beta (B + \lambda)^{-1} (A - B) A^{-\alpha} A^\alpha (A + \lambda)^{-1} \right] x d\lambda \right\| \\ &\leq \|x\| + \left\| \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} B^\beta (B + \lambda)^{-1} (A - B) A^{-\alpha} A^\alpha (A + \lambda)^{-1} x d\lambda \right\| \\ &\leq \|x\| + C \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\beta}}{(\lambda^{1-\beta})(\lambda^{1-\alpha} + \delta)} \|x\| d\lambda \leq \|x\| \left( 1 + C \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\beta}}{\lambda^\gamma + \delta} d\lambda \right) < \infty. \end{aligned}$$

Dann ist noch:

$$\begin{aligned} &[\mathbb{I} + A^\alpha (A + \lambda)^{-1} (B - A) A^{-\alpha}] A^\alpha (B + \lambda)^{-1} \\ &= A^\alpha (A + \lambda)^{-1} [(A + \lambda) + B - A] A^\alpha (B + \lambda)^{-1} \\ &= A^\alpha (A + \lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

und wegen:

$$\|\mathbb{I} - [\mathbb{I} + A^\alpha (A + \lambda)^{-1} (B - A) A^{-\alpha}]\| \leq C|\lambda|^{\alpha-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty,$$

folgt:

$$\|A^\alpha (A + \lambda)^{-1}\| = \|[\mathbb{I} + A^\alpha (A + \lambda)^{-1} (B - A) A^{-\alpha}] A^\alpha (B + \lambda)^{-1}\| \rightarrow \|A^\alpha (B + \lambda)^{-1}\|.$$

Daher schließen wir:  $\|A^\alpha (B + \lambda)^{-1}\| = O(\lambda^{\alpha-1})$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  und vertauschen von  $A$  mit  $B$  führt die Behauptung für  $B^\beta A^{-\beta}$  auf das, im wesentlichen selbe Integral zurück.  $\square$

**Definition 2.11.** Sei  $A$  sektoriell auf einem Banach-Raum  $X$  und  $\alpha \geq 0$ . Setzen wir  $A_1 := A + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  so gewählt dass,  $\Re(\Sigma_A) > 0$  gilt. Dann definieren wir:

$$X^\alpha := D(A_1^\alpha) \quad (2.2.1)$$

$$\|x\|_\alpha := \|A_1^\alpha x\| \quad \text{für } x \in D(A_1^\alpha). \quad (2.2.2)$$

**Lemma 2.12.**  $X^\alpha$  aus Definition 2.11 ist ein Banachraum. Dieser ist unabhängig von gewählten  $a \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es ist klar dass  $X^\alpha$  ein Banachraum ist. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  wie in der Definition, sei  $\{x_n\} \subset X^\alpha$  eine Cauchy-Folge. Es gilt:  $D(A+a) = D(A+b) = D(A)$  und für alle  $\alpha \geq 0$  ist  $(A+a - (A+b))A^{-\alpha} = (a-b)A^{-\alpha}$  beschränkt. Aus Satz 2.10 folgt:  $(A+b)^\alpha(A+a)^{-\alpha}$  und  $(A+a)^\alpha(A+b)^{-\alpha}$  beschränkt. Daher gilt:

$$\|(A+b)^\alpha x_n\| \leq \|(A+b)^\alpha(A+a)^{-\alpha}\| \|(A+a)^\alpha x_n\| \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

$\square$

**Satz 2.13.** Sei  $A$  sektoriell auf  $X$ ,  $X^\alpha$  für  $\alpha \geq 0$  wie in Definition 2.11. Dann ist  $X^0 = X$ ,  $X^\beta \subset X^\alpha$  für  $\beta \geq \alpha$ ,  $X^\beta$  dicht in  $X^\alpha$ . Hat  $A$  eine kompakte Resolvente, so ist die Inklusion  $X^\beta \hookrightarrow X^\alpha$  kompakt für  $\beta \geq \alpha \geq 0$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen, Sätzen, Lemmata und Übungen die bereits bewiesen wurden.  $\square$

## 2.3 Anhang

**Definition 2.14.** Für  $\alpha > 0$  definieren wir die Gamma Funktion durch:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (2.3.1)$$

**Lemma 2.15.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (2.3.2)$$

*Beweis.* Es ist:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\alpha} t^{\alpha} e^{-t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} + \alpha^{-1} \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt = \alpha^{-1} \Gamma(\alpha + 1).$$

Also folgt wegen  $\Gamma(1) = 1$  die Behauptung induktiv.  $\square$

**Definition 2.16.** Sei  $A \in \mathcal{B}(X)$  und  $B \in \mathcal{L}$ . Wir sagen  $A$  kommutiert mit  $B$ , falls gilt:

$$AB \subset BA.$$

**Definition 2.17.** Sei  $X$  ein linearer raum und  $X = U \oplus V$ . Dann sagen wir:  $P$  ist ein stetiger Projektor auf  $U$  längs  $V$ , falls  $P$  ein Projektor ist, und gilt:

$$R(P) = U \wedge N(P) = V.$$

**Lemma 2.18.** Sei  $X$  ein Banach-Raum und seien  $U, V \subset X$  komplementäre abgeschlossene Unterräume, d.h. es gelte:

$$X = U \oplus V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

Dann gibt es einen stetigen Projektor  $P$  auf  $U$  längs  $V$ .

*Beweis.* Definieren wir:  $Px := P(u + v) = u$ . Sei  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine konvergente folge, so dass die Folge  $\{Px_n\}$  konvergiert. Setzen wir  $y_n := Px_n$ , und bezeichnen wir mit  $x, y$  jeweils die Grenzwerte. Setzen wir noch  $z_n := x_n - Px_n$ , so folgt:

$$Pz_n = Px_n - P^2x_n = y_n - y_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ , und da  $V$  abgeschlossen folgt:  $Pz = 0$ , wobei wir mit  $z$  den Grenzwert bezeichnen. Dann folgt:

$$z = x - y \Leftrightarrow 0 = Pz = Px - Py \Leftrightarrow Px = Py.$$

Aber es ist  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ , und da  $U$  abgeschlossen folgt:  $y \in U$ , d.h.  $Py = y$ , und damit  $Px = y$ .

Dann ist  $P$  abgeschlossen und definiert auf ganz  $X$ , und mit Satz über abgeschlossenen Graphen folgt:  $P$  stetig.  $\square$

**Definition 2.19.** Sei  $A$  ein Operator auf einem linearem Raum. Wir sagen  $D(A)$  wird durch  $U, V \subset A$  zerlegt falls gilt:

(i)  $X = U \oplus V$ .

(ii) Für den Projektor  $P : X \rightarrow U$  auf  $U$  längs  $V$  gilt:

$$PD(A) \subset D(A) \wedge AU \subset U \wedge AV \subset V.$$

**Definition 2.20.** Das Spektrum eines Abgeschlossenen Operators ist separiert, wenn es eine geschlossene, rektifizierbare Kurve  $\Gamma \subset \rho(A)$  gibt, so dass gilt: in beiden Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  hat  $\Sigma_A$  nichttriviale Anteile und es ist  $\Gamma \cap \Sigma_A = \emptyset$ .

**Definition 2.21.** Sei  $A$  ein Operator auf einem linearem Raum. Wir sagen  $D(A)$  wird durch  $U, V \subset A$  zerlegt falls gilt:

(i)  $X = U \oplus V$ .

(ii) Für den Projektor  $P : X \rightarrow U$  auf  $U$  längs  $V$  gilt:

$$PD(A) \subset D(A) \wedge AU \subset U \wedge AV \subset V.$$

**Lemma 2.22.** Sei  $A$  ein Operator. Genau dann wird  $D(A)$  durch  $U, V$  zerlegt, wenn gilt:  $AP \subset PA$ .

*Beweis.* Werde  $D(A)$  durch  $U, V$  zerlegt. Dann gilt:

$$D(PA) = A^{-1}D(P) = A^{-1}X = D(A),$$

und:

$$D(AP) = P^{-1}D(A) = P^{-1}D(A) \cap U = D(A) \cap U \subset D(A).$$

Also vertauschen  $P$  und  $A$ .

Es gelte  $P$  ist ein stetiger Projektor von  $U$  längs  $V$ , und  $P$  und  $A$  kommutieren. Dann gilt:

$$\begin{aligned} PD(A) &= PD(A) \cap U = D(A) \cap U \subset D(A) \\ AU &= APV = PAU \subset U. \end{aligned}$$

Und weiter:

$$\begin{aligned} AV &= A(\mathbb{I} - P)V = AV - APV \\ &= AV - PAV \Leftrightarrow \{0\} = APV = PAV \Rightarrow AV \subset V. \end{aligned}$$

□

**Definition 2.23.** Sei  $D(A)$  zerlegt durch  $U, V$ . Wir definieren:

$$\begin{aligned} A_U : U &\rightarrow U, & D(A_U) &= D(A) \cap U, & A_U u &:= Au. \\ A_V : V &\rightarrow V, & D(A_V) &= D(A) \cap V, & A_V v &:= Av. \end{aligned}$$

**Lemma 2.24.** Ist  $A$  abgeschlossen,  $U, V$  eine Zerlegung von  $A$ , so sind auch  $A_U, A_V$  abgeschlossen.

*Beweis.*  $G(A_U) = G(A) \cap U \times U$ . □

**Satz 2.25.** Sei  $A$  abgeschlossen und  $\Sigma_A$  sei separiert in  $\sigma_1, \sigma_2$  mit  $\sigma_1$  in der beschränkten Zusammenhangskomponente. Dann gibt es eine Zerlegung  $X = U \oplus V$  und eine Zerlegung  $A = A_U + A_V$  mit  $\Sigma_{A_U} = \sigma_1$  und  $\Sigma_{A_V} = \sigma_2$ . Dabei ist  $A_U \in \mathcal{B}(U)$ .

*Beweis.* □

## 2.4 Übungen

**Aufgabe 1.** Sei  $A$  sektoriell, selbstadjungiert und positiv definit. Dann hat  $A^\alpha$  für alle  $\alpha$  die selben Eigenschaften.

*Beweis.* Zunächst bemerken wir:

$$(A^{-1}Ax, Ay) = (x, Ay) = (Ax, y) = (Ax, A^{-1}Ay),$$

für alle  $x, y \in D(A)$ . Aber da  $A^{-1}$  beschränkt, folgt  $R(A) = X$ , d.h.  $A^{-1}$  selbstadjungiert auf  $X$ .

Weiter aus:

$$(\|A^{-1}\| \|x\|)^{-2} \leq \|A^{-1}x\|^{-2},$$

und:

$$(A^{-1}x, x) = (AA^{-1}x, A^{-1}x) \geq \varepsilon \|A^{-1}x\|^2,$$

folgt:

$$\frac{(A^{-1}x, x)}{(\|A^{-1}\|^2 \|x\|^2)} \geq \varepsilon \Leftrightarrow (A^{-1}x, x) \geq \delta \|x\|^2,$$

mit  $\delta = \varepsilon \|A^{-1}\|^2 > 0$ .

D.h., wir haben gezeigt:  $A^{-1}$  selbstadjungiert und positiv definit.

Weiter gilt:

$$((A + \lambda)x, y) = (x, (A + \lambda)y) \Rightarrow ((A + \lambda)^{-1}x, y) = (x, (A + \lambda)^{-1}y),$$

und:

$$((A + \lambda)x, x) \geq \varepsilon \|x\|^2 + |\lambda| \|x\|^2 \geq \max\{|\lambda|, \varepsilon\} \|x\|^2,$$

für alle  $\lambda \in \rho(A)$ .

Aber insgesamt folgt die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 2.** Sei  $A$  sektoriell mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$ . Dann ist  $A^{-1}$  genau dann kompakt, wenn  $A^{-\alpha}$  für alle  $\alpha > 0$ , kompakt, genau dann kompakt wenn  $e^{-At}$  für alle  $t > 0$  kompakt.

*Beweis.* Zunächst ist für alle  $\alpha \in \mathbb{N}$  die Aussage trivial. Sei  $0 < \alpha < 1$  und  $U \subset X$  beschränkt. Dann ist:

$$\overline{A^{-1}U} = \overline{A^{-\alpha}A^{-(1-\alpha)}U}.$$

D.h.  $A^{-1}$  genau dann kompakt wenn  $A^{-\alpha}$  oder  $A^{-(1-\alpha)}$  kompakt. Aber da dies für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gilt, so folgt  $A^{-\alpha}$  kompakt für alle  $\alpha \in (0, 1)$ . Für  $\alpha > 0$  folgt aber die Aussage aus  $A^{-\alpha} = A^{-\beta}A^{-m}$ ,  $\alpha = [\alpha] + \alpha - [\alpha] =: m + \beta > 0$ .

Aber aus  $A^{-\alpha}$  kompakt folgt das zweite Teil der Behauptung sofort.  $\square$

**Aufgabe 3.** Für alle  $x \in X$  ist  $t \mapsto tAe^{-At}x$  stetig auf  $[0, \infty)$ . Es gilt auch  $tAe^{-At}x \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0+$ .

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} \|t_1Ae^{-At_1}x - t_0Ae^{-At_0}x\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t_1e^{\lambda t_1} - t_0e^{\lambda t_0}) A(A + \lambda)^{-1} x d\lambda \right\| \\ &\leq (t_1 - t_0) \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t_1} A(A + \lambda)^{-1} x d\lambda \right\| \\ &= (t_1 - t_0) \|Ae^{-At_1}x\| \\ &\leq (t_1 - t_0) \frac{C}{t_1} e^{-\delta t_1} \|x\|, \end{aligned}$$

für  $t_1 \geq t_0 \geq 0$ .

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|tAe^{-At}x\| &\leq t \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} te^{\lambda t} \|x\| d\lambda + t \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\lambda| e^{\lambda t} \left(1 + |\lambda| \frac{M}{|\lambda - \delta|}\right) \|x\| d\lambda \\ &\leq Ct \rightarrow 0, \text{ für } t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4.** Sei  $A$  selbstadjungiert und positiv definit auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gilt:

$$\|A^\alpha x\| \leq \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}, \quad \forall x \in D(A).$$

Vergleiche auch mit Satz 2.7.

*Beweis.* Der Operator  $A$  hat die Darstellung:

$$A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda,$$

mit  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in [0, \infty)}$  eine einparametrische Zerlegung der Einheit. Schreiben wir  $E(\Delta) := E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}$  für  $\lambda_1, \lambda_0 \in [0, \infty)$ , dann ist uns bekannt:

$$E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0, \quad \text{falls } (\lambda_0^1, \lambda_1^1) \cap (\lambda_0^2, \lambda_1^2) = \emptyset.$$

Daher folgt für  $x \in D(A)$ :

$$\|Ax\|^2 = \int_0^\infty |\lambda|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

Setzen wir  $g(t) := t^{\frac{1}{\alpha}}$  für  $0 \leq \alpha < 1$ . Die Funktion  $g$  ist konvex, und aus der Jensens-Ungleichung<sup>2</sup> folgt:

$$\left(\frac{\|A^\alpha x\|}{\|x\|}\right)^{2/\alpha} = g\left(\frac{\int_0^\infty |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda)}{\int_0^\infty d\mu(\lambda)}\right) \leq \frac{1}{\int_0^\infty d\mu(\lambda)} \int_0^\infty g(|\lambda|^{2\alpha}) d\mu(\lambda) = \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^2,$$

<sup>2</sup>Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$g\left(\frac{1}{\int_{\Omega} d\omega} \int_{\Omega} u d\omega\right) \leq \frac{1}{\int_{\Omega} d\omega} \int_{\Omega} g(u) d\omega.$$

mit  $d\mu(\lambda) = d \|E_\lambda x\|^2$ . Aber damit haben wir bereits die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 5.** Sei  $A$  sektoriell mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$ , dann gilt für jedes  $0 < \alpha \leq 1$ :

$$t^\alpha \|A^\alpha e^{-At} x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0+.$$

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.6 rechnen wir:

$$t^\alpha \|A^\alpha e^{-At} x\| \leq C \|Ax\| t^\alpha \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{t+s} ds.$$

Mit substitution  $u := t^\alpha s$  erhalten wir für  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} t^\alpha \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{t+s} ds &= t^{\alpha^2+1} \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{t^{\alpha+1}+u} du = t^{\alpha^2+1} \int_0^t + \int_t^\infty \frac{u^{-\alpha}}{t^{\alpha+1}+u} du \\ &\leq t^{\alpha^2+1} \left[ t^{-\alpha-1} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha} \right] = t^{\alpha^2+1} \left[ \frac{t^{-2\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha} \right] \\ &= \frac{t^{(\alpha-1)^2}}{1-\alpha} + \frac{t^{\alpha^2+\alpha}}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{für } t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Schließlich, mit  $\alpha \rightarrow 1$  erhalten wir die Behauptung für  $0 < \alpha \leq 1$ .  $\square$

**Aufgabe 6.** Sei  $A$  sektoriell mit  $\Re(\Sigma_A) > 0$  auf einem Banachraum  $X$ . Sei  $B : X \rightarrow Y$  linear,  $Y$  ein Banachraum. Es gelte  $D(A) \subset D(B)$  und für ein  $\alpha \in [0, 1)$ :

$$\|Bx\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$$

für eine konstante  $C > 0$ . Dann besitzt  $B$  eine eindeutige Erweiterung zu einem beschränkten Operator  $B_\beta : X^\beta \rightarrow Y$  für alle  $\beta \in (\alpha, 1]$ .

*Beweis.* Es ist  $X^\beta = R(A^{-\beta})$ , d.h.  $B_\beta$  beschränkt genau dann wenn  $BA^{-\beta}$  beschränkt. Es ist auch:

$$\|BA^{-1}x\| \leq \tilde{C} \|x\|^\alpha \|A^{-1}\|^{1-\alpha} \|x\|^{1-\alpha} \leq C \|x\|,$$

für  $x \in AD(B) \cap D(A) = R(A) = X$ , d.h.  $BA^{-1}$  ist beschränkt. Daher gilt für  $x \in D(A)$ :

$$\begin{aligned}
\|BA^{-\beta}x\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} t^{\beta-1} B e^{-At} x \, dt \right\| \leq C' \int_0^{\infty} t^{\beta-1} \|B e^{-At} x\| \, dt \\
&\leq C'' \int_0^{\infty} t^{\beta-1} \|A e^{-At} x\|^{\alpha} \|e^{-At} x\|^{1-\alpha} \, dt \\
&\leq C \|x\| \int_0^{\infty} t^{\beta-1} (t^{-1} e^{-\delta t})^{\alpha} e^{-\delta(1-\alpha)t} \, dt \\
&= C \|x\| \int_0^{\infty} t^{(\beta-\alpha)-1} e^{-\delta t} \, dt < \infty,
\end{aligned}$$

für alle  $\beta \in (\alpha, 1]$ . □

## **3 Die Formel der Variation der Konstanten**

### **3.1 Das lineare Cauchy Problem**

## Literatur

- [Achieser] N.I. Achieser, I.M. Glasmann: Theorie Linearer Operatoren im Hilbertraum, Harri Deutsch (1981).
- [Dunford & Schwartz] N. Dunford, J. T. Schwartz: Linear Operators 1,2, Willey & Sons, (1963).
- [Evans] L. C. Evans: Partial Differential Equations, AMS (1998).
- [Henry] D. Henry: Geometric Theory of Semilinear Partial Differential Equations, Springer (1981).
- [Kato] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer (1980).
- [Lauterbach] R. Lauterbach: Skript zu der Vorlesung Funktionalanalysis, WS 2003/04, Universität Hamburg.